Nafouz

التمرين الأول: (5 ن)

1. أدرس حسب قيم n الطبيعية بواقي قسمة العدد 3^n على 10
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2013^{16n+2} - 2\times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0[10]$
3. عيّن الأعداد الطبيعية n حيث : $7\times 3^{n+1} - 1 \equiv 0[10]$ و $10 \prec n \leq 25$
4. ليكن العدد A مكتوب $\overline{xx02102}$ في النظام ذي الأساس 3 و مكتوب $\overline{y67y}$ في النظام ذي الأساس 9

أ) عيّن x و y

ب) أكتب A في النظام العشري

جـ) أكتب A في النظام ذي الأساس 7

التمرين الثاني:(5 ن)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر المجموعة (S) للنقط $M(x,y,z)$ حيث: $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$.

1. بيّن أنّ (S) سطح كرة يُطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها.

2. نعتبر المستوي (Q) المعرف بالمعادلة: $2x - 2y + z - 2 = 0$.

Ã) حدّد الوضع النسبي للمستوي (Q) وسطح كرة (S). .

È) بيّن أنّ نقط تقاطع المستوي (Q) والسطح الكروي (S) هو دائرة يُطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

3. نعتبر المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة: $2m\,x + (1-2m)\,y + m\,z + 1 - 2m = 0$ حيث m عدد حقيقي.

Ã) ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(0,-1,0)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(1,0,-2)$.

بيّن المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P_m). .

È) حدّد قيمة العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون المستوي (P_m) مماسًا للسطح كرة (S). .

أ) حدّد قيمة العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون المستوي (P_m) عمودي على المستوي (Q)..

التمرين الثالث:(10ن)

I) f الدالة المعرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=-x+2+2\ln(x+1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. عين $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f لا يقبل مقاربا مائلا عند $+\infty$.

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

4. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل (Δ) مماسا معامل توجيهه 1 ، يطلب كتابة معادلة له .

5. (Δ_λ) مستقيم معادلته $y=\lambda x+2\lambda$ ، λ وسيط حقيقي .

- بين أنّه مهما يكن λ من $\mathbb{R}$ فإن : (Δ_λ) يشمل نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثيتيها .

6. أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة F ذات الفاصلة α حيث : $5 \langle \alpha \langle 6$.

ب) هل (C_f) يقطع محور الفواصل على المجال $]-1;1[$ ؟

7. أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

II) نعتبر الدالة g المعرّفة على $]-1;1[$ كما يلي : $g(x)=|x|+2+2\ln(1-|x|)$.

1. أ) أثبت أن الدالة g زوجية .

ب) بين أن المنحنى (C_g) يقبل مماسين متعامدين يطلب تعيين معادلتيهما .

2. أنشئ المنحنى (C_g) الممثل للدالة g باستعمال المنحنى (C_f) .

حل التمرين الأول :(05 نقاط)

1. دراسة بواقي قسمة العدد 3^n على 10

01........

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$3^n\equiv.[10]$	1	3	9	7

2. إثبات أنّ

$$2013^{16n+2}-2\times109^{8n+1}-11\equiv0[10]$$

$2013\equiv3[10]$ معناه : $2013^{16n}\equiv1[10]$

$$2013^{16n+2}\equiv2013^{16n}\times2013^2[10]$$

$$\equiv3^2[10]\equiv9[10]$$

و لدينا : $109\equiv3^2[10]$

$$109^{8n+1}\equiv3^{16n+2}[10]\equiv9[10]$$

$$2013^{16n+2}-2\times109^{8n+1}-11\equiv9-18-11[10]$$

$\equiv0[10]$ 01

3. تعيين الأعداد الطبيعية n حيث:

$7\times3^{n+1}-1\equiv0[10]/10\prec n\le25$

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
الباقي هو	0	2	8	6

$n=4k/10\prec4k\le25$ ومنه $k\in\{3;4;5;6\}$

معناه

$n\in\{12;16;20;24\}$ 01

4. أ . باختصار : $(x;y)=(2;2)$ 01

ب. $A=2009$ 0.5

جـ . كتابة A في النظام ذي الأساس 7 .

$$2009=5\times7^3+6\times7^2$$

و منه A يكتب 5600 في النظام ذي الأساس 7

0.5....

حل التمرين الثاني :(05 نقاط)

1. لدينا: $x^2+(y-2)+z^2=3^2$ 0.5

ومنه (S) سطح كرة مركزها $w(0;2;0)$ ونصف قطرها

$R=3$ 0.5

2. أ) لدينا: $d(w;P)=2$.

بما أن $R>2$ فإن: (S) و (Q) متقاطعان

0.5.....

ب) التقاطع هو الدائرة (C) التي نصف قطرها

$r=\sqrt{R^2-2^2}=\sqrt5$ و مركزها $H\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

حيث H المسقط العمودي لـ: w على (Q).

01............

3. لدينا: الجملة $\begin{cases}x=2t\\y=2-2t\\z=t\end{cases}$ (I) مع $t\in\mathbb{R}$

هي تمثيل وسيطي (Δ).

أ- بما أن معادلة (P_m) محققة من أجل الجملة (I)

فإن. $(\Delta)\subset(P_m)$ 01

ب- (P_m) مماس لـــ: (S) يكافئ $d(w;P_m)=3$.

أي من أجل $m=0$. 01

ج- لدينا: $\vec{n}_P\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{n}_{P_m}\begin{pmatrix}2m\\1-2m\\m\end{pmatrix}$.

$(P)\perp(P_m)$ يكافئ $\vec{n}_P.\vec{n}_{P_m}=0$.

وعليه نجد: $m=\frac{2}{9}$ 0.5

حل التمرين الثالث: (10نقاط)

I) الدالة f المعرّفة بـ: $f(x)=-x+2+2\ln(x+1)$

1. تعيين النهايات عند حدود مجموعة التعريف :

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=-\infty$ (مع الطريقة)

0.5.........

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ (مع الطريقة)

0.5.........

2. تبيان أن المنحنى (C_f) لايقبل مقاربا مائلا عند $+\infty$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(-x)=+\infty$

إذن عند $+\infty$ لا يقبل (C_f) مقاربا مائلا وإنما يقبل فرعا من قطع مكافئ بإتجاه المستقيم ذو المعادلة

$y=-x$ 0.5

3. دراسة إتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول التغيرات :

الدالة f تقبل الإشتقاق على مجموعة تعريفها و يكون

$$f'(x)=\frac{-x+1}{x+1}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-x+1)$

01.................

Nafouz

جدول إشارة $f'(x)$.

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

إذن لما $x \in]-1;1]$ f متزايدة ،

ولما $x \in]-1;1]$ f متناقصة. 0.25.................

• جدول التغيرات: 0.75..................

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1+\ln 4$	↘	$-\infty$

4. إثبات أن (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه 1 :

أي: $f'(x_0)=1$ تكافئ: $\frac{-x_0+1}{x_0+1}=1$ ، $x_0 \in D$

ومنه: $x_0=0$ ، ومعادلة المماس هي: $y=x+2$

01.........

5. إثبات أن المستقيمات (Δ_λ) تشترك في نقطة واحدة:

لدينا: $\lambda(x+2)-y=0$ فيكون: $(x+2=0)$ و $(y=0)$

منه $(x=-2)$ و $(y=0)$

إذن كل المستقيمات تشترك في النقطة $B(-2;0)$

01..........

6. أ) تبيان أن (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة F .

• الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما و $f(5)\times f(6)<0$.

إذن (ح م ق م) فإن: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

$\alpha \in]5;6[$

أي أن (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة $F(\alpha;0)$

0.5.....

ب) هل (C_f) يقطع محور الفواصل على المجال $]-1;1]$ ؟

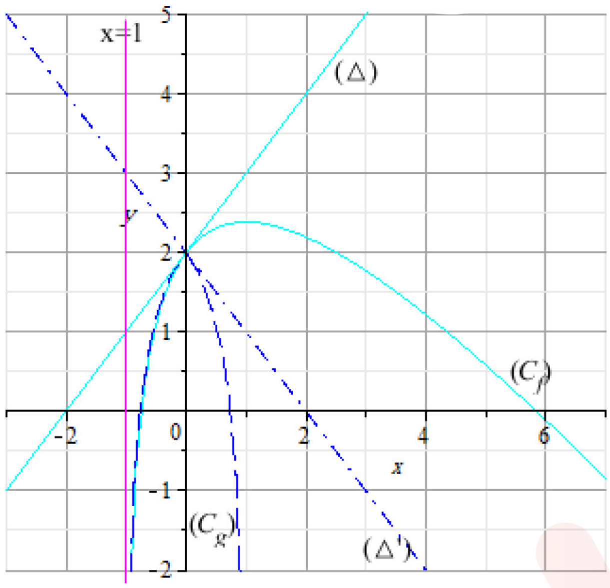
• الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما

• ولدينا: $f(1)\simeq 2,38$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x)=-\infty$ أي أن:

$$\left[\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x)\right]\times f(1)<0$$

إذن (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة وحيدة

0.5... $K(\beta;0)$



$II)$ g الدالة المعرّفة بـ:

$$g(x)=|x|+2+2\ln(1-|x|)$$

1. إثبات أن الدالة g زوجية على $D_g=]-1;1[$:

ـ مجموعة التعريف متناظرة بالنسبة للمركز ذو الفاصلة: $x=0$

- $g(-x)=g(x)$، إذن الدالة g زوجية. 0.5............

2. تبيان أن (C_g) يقبل مماسين متعامدين :

على المجال $]-1;0[$ (C_g) يقبل مماسا (Δ) معادلته

$y=x+2$

لكن الدالة زوجية على المجال $]-1;1[$ إذن الدالة g تقبل مماسا

(Δ') على المجال $[0;1[$ معادلته $y=-x+2$ حيث:

$a_{(\Delta)}=1$

و $a_{(\Delta')}=-1$ $aa'+1=0$ إذن: $(\Delta)\perp(\Delta')$ 01........

3. رسم المنحني (C_g): لدينا: الدالة عبارة $g(x)$ هي:

$$\begin{cases} g(x)=-x+2+2\ln(x+1) & x\in]-1;0[\\ g(x)=x+2+2\ln(-x+1) & x\in]0;1[\end{cases}$$

ومنه على المجال $]-1;0]$: (C_g) ينطبق على (C_f)، ثم نناظر الرسم على المجال $[0;1[$ لأن الدالة g زوجية.

01.........

7. إنشاء (C_f) و (Δ): 01...............

$f(1)=1+\ln(2)\simeq 2,38$ نقطة حدية كبرى)

$((1;1+\ln(2))$

جـ - دراسة الوضع النيبي لـ (Δ) و (C_f):

لدينا : $f(x) - y = ln(xe^x - e^x + 1)$

$f(x) - y = 0$ معناه : $ln(xe^x - e^x + 1) = ln1$

معناه : $xe^x - e^x + 1 = 1$

معناه : $e^x(x - 1) = 0$

معناه : $x = 1$ لان $e^x > 0$

$f(x) - y > 0$ معناه : $x > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;-1)$	(C_f) فوق (Δ)

4) ا - حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ln(x))$:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ln(x)) = \lim_{x\to+\infty} ln\frac{x - 1 + e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ln\frac{x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right) = 0$$

الاستنتاج:المنحنى (C_{ln}) هو منحنى مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$

ب - الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_{ln}) على $]0 ; +\infty[$:

$$f(x) - \ln x = \ln\frac{x-1+e^{-x}}{x} = \ln\left(1 + \frac{-1+e^{-x}}{x}\right)$$

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا $-x<0$ ومنه $e^{-x}<1$ إذن

$\frac{-1+e^{-x}}{x}<0$ وهذا يكافئ $1+\frac{-1+e^{-x}}{x}<1$

ومنه $\ln\left(1+\frac{-1+e^{-x}}{x}\right)$ إذن $f(x)-\ln x<0$

ومنه (C_f) يقع تحت $(C_{\ln})$ على المجال $]0;+\infty[$

5) تبيان ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β:

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $]-\infty ; 0[$ و منه فهي مستمرة و رتيبة تماما على $]-1.2 ; -1.1[$ و

$f(-1.2) = 0.11$ و $f(-1.1) = -0.10$

بما أن $f(-1.2)f(-1.1) < 0$ فانه حسب مبرهنه القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$$-1.2 < \alpha < -1.1$$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $]0; +\infty[$ و منه مستمرة و رتيبة تماما على $]1.8 ; 1.9[$ و $f(1.8) = -0.03$

$f(1.9) = 0.04$

بما أن $f(1.8)f(1.9) < 0$ فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث

$$1.8 < \beta < 1.9$$

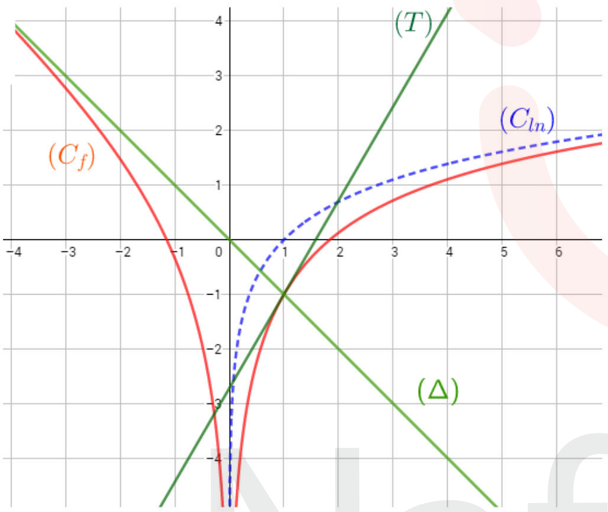
6) أ - كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T) : y = (e - 1)(x - 1) - 1$$

$$(T): y = (e - 1)x - e$$

ب - الانشاء



7) المناقشة البيانية :

(E) تكافئ: $ln(x - 1 + e^{-x}) = (e - 1)x + 1 + m$

تكافئ : $f(x) = (e - 1)x + 1 + m$

حلول المعادلة (E)هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y = (e - 1)x + 1 + m$ الموازية لـ (T) .

① إذا كان $1 + m < -e$ أي $m < -1 - e$ فان المعادلة (E) تقبل حلين موجبين تماما و حل سالب .

② إذا كان $1 + m = -e$ أي $m = -1 - e$ فان المعادلة (E) تقبل حل مضاعف موجب و حل سالب .

③ إذا كان $1 + m > -e$ أي $m > -1 - e$ فان المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا سالب .